Chapitre IV
Courant Alternatif

December 3, 2014

Contents

1 Grandeurs periodiques

a) *periode et fréquence*

i) Defs: Une grandeur temporelle $g(t)$ est dite *periodique*, de periode T, si elle satisfait la propriété:

$$g(t+T) = g(t)$$

ii) la **fréquence** ν et **pulsation** ω du signal $g(t)$

$$\begin{array}{lll} \nu & = \frac{1}{T} & , \quad \text{fréquecne} \quad \text{en Hertz (H)} \\ \omega & = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu & , \quad \text{pulsation en} \quad \text{rd/s} \end{array}$$

iii) exemples

- *signal sinusoidal*

$$\begin{aligned} g(t) &= G_M \sin \omega t \quad , \quad G_M \text{ valeur maximale de } g(t) \\ S(t) &= S_M \sin(\omega t + \varphi) \quad \varphi \text{ phase de } S(t) \end{aligned} \tag{1.1}$$

- *cas général*

  les grandeurs périodiques ne sont pas rigoureusement sinusoidale

  ▶ **exemple**:

  la *f.e.m* $e(t)$ fournie par **un alternateur**

  la forme du signal est comme représentée dans fig 1.

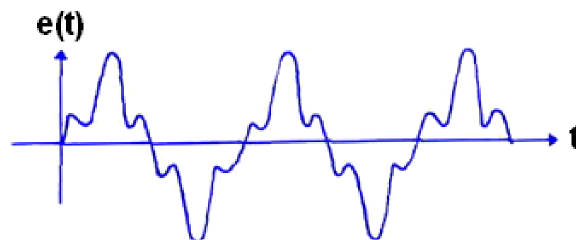


Figure 1: *signal periodique, il correspond à la superposition des 3 signaux de la fig 2*

iv) propriété

Comme le montre la fig 2, le signal de *f.e.m* $e(t)$ peut être également interprétée en terme de

superposition de signaux sinusoidaux

c'est le théorème de Fourier

b) *Décomposition de $g(t)$ en série de Fourier*

i) théorème de Fourier:

Toute fonction periodique $g(t) = g(t+T)$ peut toujours se décomposer comme

$$g(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t\right]$$

aA_n et B_n, les modes de Fourier

$$A_n = \frac{2}{T}\int_0^T dt \cos(n\omega t) \times g(t)$$

$$B_n = \frac{2}{T}\int_0^T dt \sin(n\omega t) \times g(t)$$

- Le terme $n = 1$ de la décomposition est appelé *mode fondamentale*
- Les autres $n \geq 2$ sont appelés *modes harmoniques*.

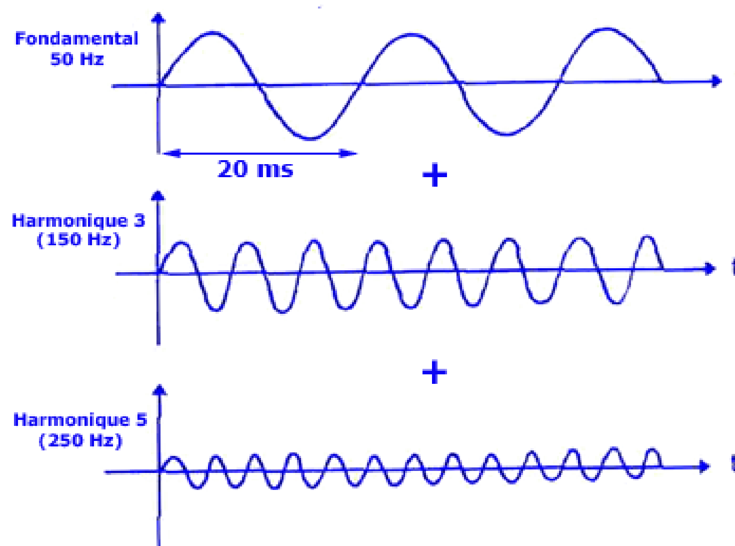


Figure 2: *somme de 3 signaux sinusoidaux*

ii) 2 Remarques

▶ Si on connait l'action d'une **tension sinusoidale** sur un circuit (C), en appliquant

théorème de Fourier

alors on peut connaitre l'action d'une **fonction periodique quelconque**.

$$\text{tension sinusoidale} \quad \Rightarrow \quad \text{fonction periodique quelconque}$$

▶ Le **signal sinusoidal** représente

grandeur periodique **la plus simple**

On se limitera à ce genre de signaux.

1.1 Gradeurs sinusoidales

Considérons une grandeur sinusoidale de periode T comme dans (1.1).

Pour fixer les idées:

1) Exemples:

- courant electrique

$$i(t) = I_M \sin \omega t \quad : \quad \text{valeur instantanée}$$

$$I_M \quad \text{valeur max correpondant à } \omega t = \tfrac{\pi}{2} \mod 2\pi$$

- tension

$$u(t) = U_M \sin \omega t \quad : \quad \text{valeur instantanée}$$

$$U_M \quad \text{valeur max correpondant à } \omega t = \tfrac{\pi}{2} \mod 2\pi$$

2) Deux notions

A partir de signaux de ce genre, on définit

2 grandeurs

très utiles dans les applications pratiques.

a) valeur moyenne I_{moy}

- *Def*: La valeur moyenne de $i(t)$ pendant un temps de mesure τ est définie par

$$\boxed{\begin{aligned} I_{moy} &= \tfrac{1}{\tau}\int_0^\tau i(t)\,dt \\ &= \tfrac{1}{\tau}\int_0^\tau I_M \sin\omega t dt \end{aligned}}$$

soit en effectuant:

$$I_{moy} = \frac{I_M}{\omega\tau}\left(1-\cos\omega\tau\right)$$

- cas particulier où $\tau = T$: on a

$$\omega\tau = 2\pi \quad \Rightarrow \quad I_{moy} = 0$$

càd autant de valeur instantanée positives que négatives.

b) valeur efficace I_{eff}

- *Def*: La valeur efficace du courant $i(t)$ est définie par la racine de sa valeur moyenne quadratique sur une periode T:

$$\boxed{I_{eff} = \sqrt{\tfrac{1}{T}\int_0^T i^2(t)\,dt}}$$

ou encore

$$I_{eff}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)\,dt$$

- *relation de I_{eff} avec I_M.*

Remplacons

$$i(t) = I_M \sin\omega t$$

et effectuons

$$\begin{aligned} I_{eff}^2 &= \tfrac{I_M^2}{T}\int_0^T dt \sin^2\omega t \\ &= \tfrac{I_M^2}{2T}\int_0^T dt\left(1-\cos 2\omega t\right) \\ &= \tfrac{I_M^2}{2} \end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{I_{eff} = \tfrac{I_M}{\sqrt{2}} \neq 0 \qquad \Leftrightarrow \quad I_M = I_{eff}\sqrt{2}}$$

- *propriété*

régime variable		**régime continue**
valeur efficace I_{eff}	analogue de	valeur du courant I_{cont}

c) Application

Pour illustrer *l'importance* de la valeur efficace I_{eff}, calculons:

- *l'énergie électrique* W par unité de temps

$$W_{moy} = \frac{1}{T}\int_0^T \mathcal{P}dt \qquad \mathcal{P} = Ri^2$$

dissipée par effet Joule dans *une résistance* R *pure* traversée par le courant

$$i(t) = I_M \sin \omega t$$

La valeur moyenne de cette énergie sur une periode T donne

$$\begin{aligned} W_{moy} &= \frac{1}{T}\int_0^T Ri^2 dt \\ &= R \times \left(\frac{1}{T}\int_0^T i^2 dt\right) \\ &= RI_{eff}^2 \end{aligned}$$

qui est **exactement** la même énergie qui devrait être consommée si la résistance R était traversée par un courant continue

$$i = I_{eff}$$

- *conclusion*
  La **valeur efficace** est en quelques sortes

l'analogue de

lavaleur du courant en régime continue

valeur efficace en variable $\leftrightarrow$ valeur du courant en régime continue

2 Régime permanent et régime transitoire

Considérons un circuit RL composé de:

- ▶ une **résistance R** montée en serie avec
- ▶ un **bobine d'inductance L**
- ▶ une tension sinusoidale $u(t)$ appliquée aux bords de $R + L$; voir fig

$$\begin{aligned} u(t) &= U_M \cos(\omega t + \varphi) \\ &= U_{eff}\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi) \end{aligned} \tag{2.1}$$

La **loi d'Ohm** appliquée au circuit est

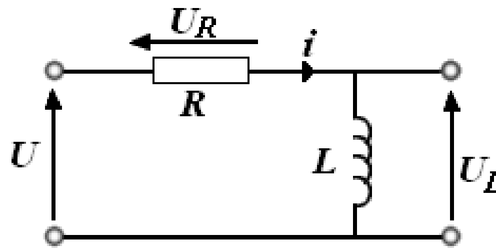


Figure 3: *Circuit RL en série*

$$\boxed{\begin{array}{c} u = Ri + L\frac{di}{dt} \\ L\frac{di}{dt} + Ri = u \end{array}} \tag{2.2}$$

La solution de cette equation est donnée par la somme de **2 termes**

$$i = \underbrace{i_p}_{\text{sol partiulière}} + \underbrace{i_h}_{\text{sol homogène}} \tag{2.3}$$

$$\boxed{i(t) = \underbrace{I_M \cos(\omega t + \varphi - \chi)}_{i_p\text{: permanant}} + \underbrace{K \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}_{i_h\text{: transitoire}}}$$

a) **<u>solution particulière</u>**:i_p

La composante i_p obeit à:

$$L\frac{di_p}{dt} + Ri_p = u$$

- *Prenons i_p de la forme*

$$i_p = I_M \cos(\omega t + \varphi - \chi) \quad , \quad I_M \text{ et } \chi \text{ 2 inconnues à déterminer}$$

- remplacons dans (2.1)

$$L\frac{di_p}{dt} + Ri_p = u = U_M \cos(\omega t + \varphi)$$

et identifions. On a

$$\begin{aligned} L\frac{di_p}{dt} &= -LI_M\omega \sin(\omega t + \varphi - \chi) \\ &= LI_M\omega \left[\cos(\omega t + \varphi) \times \sin\chi - \sin(\omega t + \varphi) \times \cos\chi\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Ri_p &= RI_M \cos(\omega t + \varphi - \chi) \\ &= RI_M \left[\cos(\omega t + \varphi) \times \cos\chi + \sin(\omega t + \varphi) \times \sin\chi\right] \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} Ri_p + L\frac{di_p}{dt} &= I_M \left[L\omega \sin\chi + R\cos\chi\right] \cos(\omega t + \varphi) \\ &\quad + I_M \left[R\sin\chi - L\omega\cos\chi\right] \sin(\omega t + \varphi) \\ &\text{doit être égal à} \\ &= U_M \cos(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

En comparant, on obtient

$$\begin{aligned} I_M &= \frac{U_M}{L\omega \sin\chi + R\cos\chi} \\ \tan\chi &= \frac{L\omega}{R} \end{aligned}$$

$$i_p = I_M \cos(\omega t + \varphi - \chi)$$

b) <u>solution de l'homogène</u>: i_h

$$L\frac{di_h}{dt} + Ri_h = 0$$

La solution est

$$i_h(t) = K \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad , \quad \tau = \frac{L}{R} \text{ constante du temps}$$

K une constante d'intégration

- Noter que pour $t = \tau$, on a:

$$i_h = Ke^{-1} = 0,33K$$

- i_h = régime transitoire

$$t \to \infty \qquad \Rightarrow \qquad i_h \to 0$$

c) *solution générale*

C'est la somme des 2 termes: le terme peridoque $i_p(t)$ et le terme transitoire $i_h(t)$, soit:

$$i(t) = \underbrace{I_M \cos(\omega t + \varphi - \chi)}_{\text{periodique}} + \underbrace{K \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}_{\text{transitoire}}$$

avec la constante

$$K = i(0) = -\cos(\varphi - \chi)$$

Dans ce qui on ne s'interessera à la **valeur efficace** et au **déphasage** des grandeurs du **régime permanent**.

3 Etude des circuits alternatifs

Etant donné un circuit électrique $\mathcal{C}$,

▶ dont les éléments sont connus

résistances R_i , bobines L_j , condensateur C_k

▶ auquel on applique une tension sinusoidale connue; et

$$u(t) \quad = U_M \sin \omega t$$

▶ on cherche à déterminer:

- les **valeurs efficaces** I_{eff} **des courants** $i_k(t)$ dans chaque branche

$$I_{eff}$$

- leur **déphasages** ϕ_k par rapport à la tension à leurs bornes; càd:

$$i_k(t) = I_{M,k} \sin(\omega t + \phi_k)$$

Pour cela, on distingue *2 méthodes*:

- méthode **géométrique de**

Fresnel

- méthode des

nombres complexes

3.1 Méthode graphique de Fresnel

3.1.1 Principe de la méthode

La grandeur $i(t) = I_M \cos(\omega t - \varphi)$ est représentée par un vecteur planaire $\vec{I}(t)$ d'origine O, de module I_M, tournant avec une vitesse ω constante. A chaque instant, $i(t)$ est la projection de $\vec{I}(t)$ sur $\overrightarrow{Ox}$, càd:

grandeur physique	$\rightarrow$	représentation de Fresnel
$i(t) = I_M \cos(\omega t - \varphi)$		$\vec{I}(t) = I_M \cos(\omega t - \varphi)\,\vec{e}_x + I_M \sin(\omega t - \varphi)\,\vec{e}_y$

soit

$$i(t) = \vec{e}_x.\vec{I}(t)$$

Si on a une autre grandeur

$$i'(t) = I_M \cos(\omega t - \varphi')$$

le déphasage $\Delta\varphi = \varphi - \varphi'$ entre $\vec{I}$ et $\vec{I}'$ reste le même quelque soit t; on a donc interêt à représenter les 2 grandeurs à l'instant $t = 0$.
En alternatif, ce sont les valeurs efficaces qui nous interessent; et par suite tous les diagrammes seront faits en valeurs efficaces.

3.1.2 Application à des circuits élémentaires

a) *résistance pure*

$$\begin{aligned} u(t) &= U_M \cos\omega t \\ &= U_{eff}\sqrt{2}\cos\omega t \end{aligned}$$

$$u(t) = Ri(t)$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{U_{eff}\sqrt{2}}{R}\cos\omega t \\ &= I_{eff}\sqrt{2}\cos\omega t \end{aligned}$$

on obtient donc

$$\boxed{I_{eff} = \frac{U_{eff}}{R} \quad , \qquad et \qquad \varphi_u - \varphi_i = 0}$$

La tension $u(t)$ et le courant $i(t)$ sont en phase ($\varphi_u = \varphi_i$); d'où le diagramme de Fresnel (a) de la fig 4

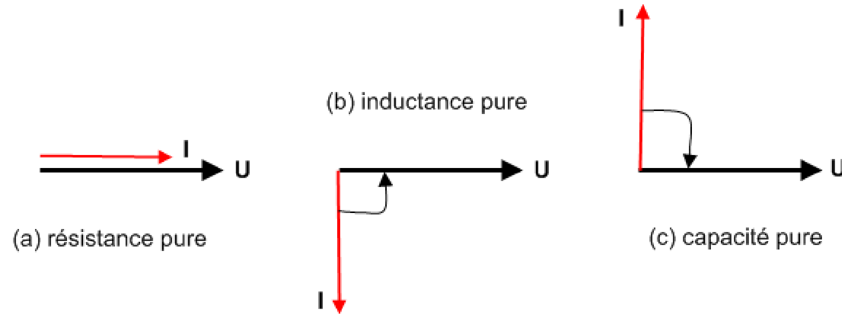


Figure 4: *diagramme de Fresnel: (a) résistance pure, (b) bobine pure, (c) capacité pure*

b) *inductance pure*

$$u(t) = U_{eff}\sqrt{2}\cos\omega t$$

$$u(t) = L\frac{di}{dt}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{U_{eff}\sqrt{2}}{L}\sin\omega t \\ &= \frac{U_{eff}\sqrt{2}}{L\omega}\cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) \\ &= I_{eff}\sqrt{2}\cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) \end{aligned}$$

on a donc

$$\boxed{I_{eff} = \frac{U_{eff}}{L\omega} \qquad et \qquad \varphi_i = \varphi_u - \frac{\pi}{2}}$$

$L\omega$ est appelé *réactance de l'inductance*; elle s'exprime en $H.rd/\sec = \Omega$. Le courant est en quadrature retard de phase par rapport à la tension $u(t)$. Autrement dit, la tension est en avance de phase de $\frac{\pi}{2}$; diagramme (b) de la fig 4.

c) *capacité pure*

$$\begin{aligned} u(t) &= U_{eff}\sqrt{2}\cos\omega t \\ i(t) &= \frac{dq}{dt} = C\frac{du}{dt} \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} i(t) &= C\omega U_{eff}\sqrt{2}\cos\left(\omega t + \tfrac{\pi}{2}\right) \\ &= I_{eff}\sqrt{2}\cos(\omega t + \tfrac{\pi}{2}) \end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{I_{eff} = C\omega U_{eff} \qquad et \qquad \varphi_i = \varphi_u + \tfrac{\pi}{2}}$$

avec

$$\frac{1}{C\omega} = \frac{U_{eff}}{I_{eff}} \quad \text{réactance de la capacité}$$

elle s'exprime en $F^{-1}rd^{-1}\sec = \Omega$. La courant est quadrature avance de phase par rapport à la tension $u(t)$. Cette dernière est donc en retard de phase de$\frac{\pi}{2}$ par rapport au courant comme dans le diagramme (c) de la fig 4.

3.1.3 Application aux circuits RLC

a) *bobine* (R, L) *en série avec une capacité* C

$$\boxed{u = u_R + u_L + u_C \qquad \rightarrow \qquad \vec{U} = \vec{U}_R + \vec{U}_L + \vec{U}_C}$$

Le courant $i(t)$ étant le même dans tous les éléments du circuit, on le prendra comme origine des phases dans le diagramme de Fresnel. Des résultats précédents, il en découle:

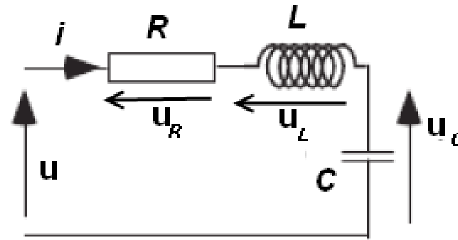


Figure 5: *Circuit RLC en série*

- $\vec{U}_R$ a pour module RI_{eff}; il est en phase avec $\vec{I}$.
- $\vec{U}_L$ a pour module $L\omega I_{eff}$; il est en avance de $\frac{\pi}{2}$ sur $\vec{I}$.
- $\vec{U}_C$ a pour module $\frac{1}{C\omega}I_{eff}$; il est en retard de $\frac{\pi}{2}$ sur $\vec{I}$.

A partir du digramme de Fresnel donné par la fig 6, on tire les relations suivantes

$$\begin{aligned} \tan\varphi &= \tfrac{L\omega-\frac{1}{C\omega}}{R} \\ U_{eff}^2 &= \left(RI_{eff}\right)^2+\left(L\omega I_{eff}-\tfrac{1}{C\omega}I_{eff}\right)^2 \end{aligned}$$

et

$$I_{eff}=\frac{U_{eff}}{\sqrt{R^2+\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)^2}}=\frac{U_{eff}}{Z}$$

avec $Z\equiv\left|\bar{Z}\right|$ le module de l'impédence complexe $\bar{Z}$ du circuit qui s'ecrit comme

$$\bar{Z}=R+j\left(L\omega-\tfrac{1}{C\omega}\right)$$

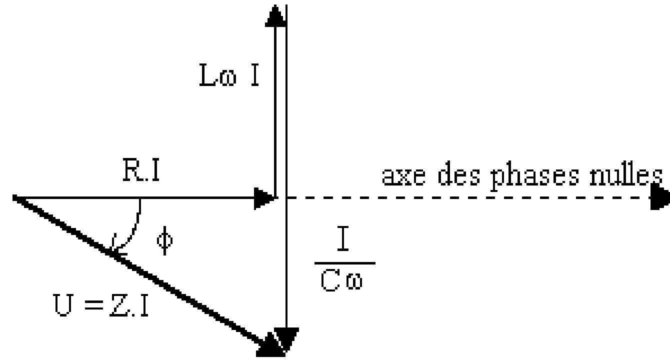


Figure 6: *diagramme de Fresnel pour le circuit RLC en serie.*

En divisant toutes les grandeurs du diagramme des tensions par I_{eff}, on obtient le diagramme des impédences.

b) *Capacité C en parallèle avec une résistance R*
Ce circuit est donné par la fig 7 Au courant $i(t)=i_R+i_C$ avec

$$i_{_R}=I_{_{RM}}\cos\omega t,\qquad i_{_C}=I_{_{CM}}\cos\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)$$

est associé les vecteurs

$$\vec{I}(t)=\vec{I}_{_R}(t)+\vec{I}_{_C}(t)$$

avec

$$\left|\vec{I}_{_R}\right|=\frac{U_{eff}}{R},\qquad \left|\vec{I}_{_C}\right|=C\omega U_{eff}$$

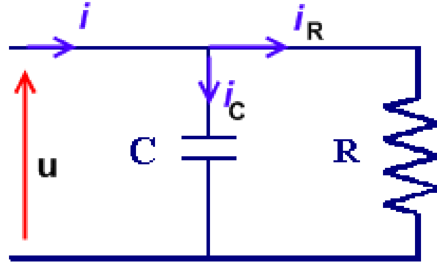


Figure 7: *Circuit C en parallèle avec R, $u\,(t)$ étant commune aux 2 branches*

et

$$\vec{I}^2 = \vec{I}_{_R}^2 + \vec{I}_{_C}^2$$

La tension $u\,(t)$ est commune aux 2 branches; on la prend comme origine des phases pour construire le diagramme de Fresnel. On obtient à partir du diagramme des courants

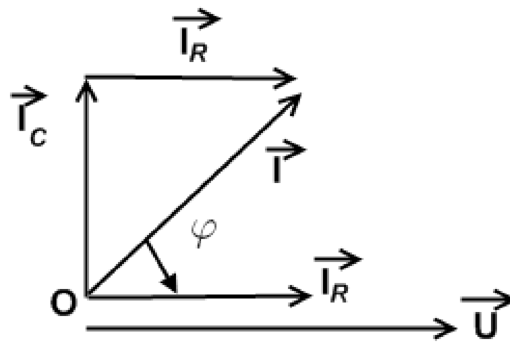


Figure 8: *Diagramme des courants*

$$I_{eff}^2 = \left(C\omega + \frac{1}{R^2}\right) U_{eff}^2 \quad \Rightarrow \quad I_{eff} = \sqrt{C\omega + \frac{1}{R^2}} U_{eff} = \frac{U_{eff}}{|Z|}$$

avec

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R} + jC\omega \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} Z = \frac{R}{1+jRC\omega} = \frac{R(1-jRC\omega)}{1+(RC\omega)^2} \\ \\ \tan\varphi = \frac{|\vec{I}_C|}{|\vec{I}_R|} = RC\omega \end{cases}$$

3.2 Méthode des nombres complexes

3.2.1 Principe de la méthode

A une fonction sinusoidale $i(t)$ on associe une fonction complexe $\underline{I}(t)$

$$i(t) = I_{eff}\sqrt{2}\cos(\omega t - \varphi) \quad \rightarrow \quad \underline{I}(t) = I_{eff}\sqrt{2}e^{j(\omega t - \varphi)}$$

- **2 remarques**
  - $$i(t) = \mathrm{Re}\,\underline{I}(t)$$
  - $$\frac{di}{dt} = -\omega I_{eff}\sqrt{2}\sin(\omega t - \varphi) \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} \frac{d\underline{I}}{dt} &= j\omega I_{eff}\sqrt{2}e^{j(\omega t - \varphi)} \\ \frac{d}{dt} \times I &= j\omega \times \underline{I} \end{aligned}$$

3.2.2 Application à 3 circuits élémentaires

a) <u>résistance pure</u>

$$u = Ri \quad \rightarrow \quad \underline{U} = R\underline{I}$$

avec

$$\begin{aligned} \frac{\underline{U}}{\underline{I}} &= \underline{Z}_R = R &&: \text{ impédence de R} \\ \frac{\underline{I}}{\underline{U}} &= \underline{Y}_R = \frac{1}{R} &&: \text{ admittance de R} \end{aligned}$$

b) <u>inductance pure</u>

$$u = U_M \cos\omega t \quad \rightarrow \quad \underline{U} = U_M e^{j\omega t}$$

$$u = L\frac{di}{dt} \quad \rightarrow \quad \underline{U} = L\frac{d\underline{I}}{dt} = j\omega L\underline{I}$$

avec

$$d\underline{I} = \frac{\underline{U}}{L}dt \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \underline{I} &= \frac{1}{L}\int dt U_M e^{j\omega t} \\ &= \frac{1}{j\omega L}U_M e^{j\omega t} \\ &= \frac{1}{j\omega L}\underline{U} \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \underline{U} &= j\omega L\underline{I} \\ &= \underline{Z}_L\underline{I} \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \underline{Z}_L = j\omega L &\quad : \quad \text{impédence de L} \\ \underline{Y}_L = \frac{1}{j\omega L} &\quad : \quad \text{admittance de L} \end{aligned}$$

c) capacité pure

$$i = c\frac{du}{dt} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \underline{I} &= C\frac{d\underline{U}}{dt} \\ &= j\omega C\underline{U} \end{aligned}$$

$$\underline{U} = \frac{\underline{I}}{jC\omega} = \underline{Z}_C\underline{I}$$

avec

$$\begin{aligned} \underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega} &\quad : \quad \text{impédence complexe de la capacité} \\ \underline{Y}_C = jC\omega &\quad : \quad \text{admittance complexe de C} \end{aligned}$$

3.2.3 Application aux circuits RLC

On donne **3** exemples

a) exemple 1 : *Circuit RLC en serie*

On considère le circuit RLC de la fig 5.

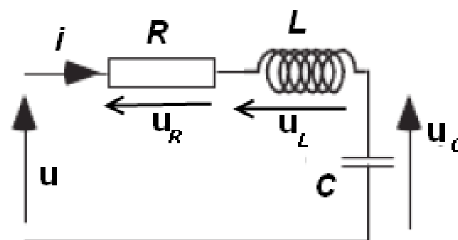


Figure 9: *Circuit RLC en série*

- La grandeur complexe associée à la tension u du circuit est:

$$u = u_R + u_L + u_C$$
$$\downarrow$$
$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L + \underline{U}_C$$

avec:

  - *Loi d'Ohm*

$$\begin{aligned} \underline{U} &= R\underline{I} + jL\omega\underline{I} + \tfrac{1}{jC\omega}\underline{I} \\ &= \underline{Z}\underline{I} \end{aligned}$$

  - *impédence complexe*

$$\boxed{\underline{Z} = R + j\left(L\omega - \tfrac{1}{C\omega}\right)}$$

  de module Z et argument:

$$\boxed{\begin{aligned} Z = |\underline{Z}| &= \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \tfrac{1}{C\omega}\right)^2} \\ \arg \underline{Z} = \varphi &= \arctan \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R} \end{aligned}}$$

- **Expression de** I_{eff} et φ:
  A partir de la loi d'Ohm

$$\underline{U} = \underline{Z}\underline{I} \qquad , \quad \underline{U} = U_M e^{j\omega t}$$

  - **2 relations**:

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} |\underline{U}| = |\underline{Z}| \times |\underline{I}| & \leftrightarrow & U = Z \times I & : & \textit{module} \\ \arg \underline{U} = \arg \underline{Z} + \arg \underline{I} & \leftrightarrow & \arg \underline{Z} = \arg \underline{U} - \arg \underline{I} & : & \textit{phase} \end{array}}$$

– courant efficace et déphasage

$$
\begin{aligned}
I_{eff} &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left|\underline{I}\right| = \tfrac{\left|\underline{U}\right|}{\sqrt{2}\left|\underline{Z}\right|} \\
&= \frac{U_{eff}}{\sqrt{R^2+\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)^2}}
\end{aligned}
$$

$$
\arg \underline{U} = \underbrace{\arg \underline{Z}}_{\varphi} + \arg \underline{I}
$$

$$
\varphi = \arctan \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}
$$

$$
\omega t = \arg \underline{Z} + (\omega t - \varphi)
$$

soit un déphasage

$$
(\widehat{I,U}) = \begin{array}{l} \arg \underline{U} - \arg \underline{I} \\ \varphi \end{array}
$$

b) exemple 2 : *Bobine LR en parallèle avec une capacité C*

La grandeur complexe

$$
\underline{U} = \underline{Z}\underline{I} \qquad \underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}}
$$

associée à la tension réelle u peut être calculée:

α) soit **aux bornes de la bobine** LR parcurue par le courant $\underline{I}_L$,

$$
\underline{U} = (R + jL\omega)\,\underline{I}_L \qquad \Rightarrow \qquad \underline{I}_L = \tfrac{\underline{U}}{(R+jL\omega)}
$$

β) ou **aux bornes de la capacité** C parcourue par le courant $\underline{I}_C$

$$
\underline{U} = \tfrac{\underline{I}_C}{jC\omega} \qquad \Rightarrow \qquad \underline{I}_C = jC\omega \underline{U}
$$

- Le courant total

$$
\begin{aligned}
\bar{I} &= \bar{I}_L + \bar{I}_C \\
&= \left(\tfrac{1}{R+jL\omega} + jC\omega\right)\underline{U} \\
&= \tfrac{1-LC\omega^2+jRC\omega}{R+jL\omega} \times \underline{U} \\
&= Y \times \underline{U}
\end{aligned}
$$

- L'impédence complexe

$$
\underline{Z} = \tfrac{1}{Y} = \tfrac{R+jL\omega}{1-LC\omega^2+jRC\omega}
$$

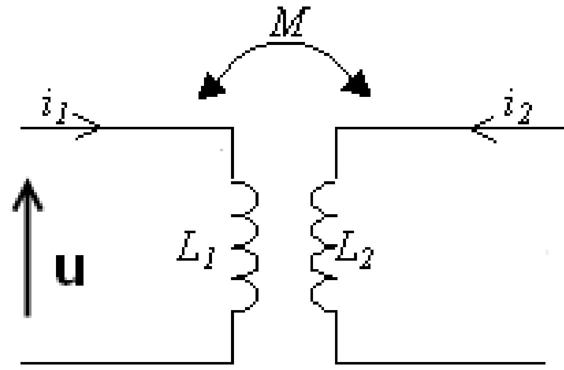


Figure 10: *inductance mutuelle*

c) exemple 3 : *couplage par inductance mutuelle*

Considérons les circuits couplés de la fig 10 nous avons

$$\underline{U} \quad = \quad \left(R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}\right)\underline{I} + jM\omega\underline{I}' \tag{3.1}$$

3.3 Impédence complexes en serie et en parallèle

a) en série : Nous avons

$$\begin{aligned} \underline{U} &= \underline{U}_1 + \underline{U}_2 + ...\underline{U}_n \\ &= \left(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + ...\underline{Z}_n\right)\underline{I} \\ &= \underline{Z}_{eq}\bar{I} \end{aligned}$$

soit une impédence complexe équivalente

$$\underline{Z}_{eq} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + ...\underline{Z}_n$$

b) en parallèle : Nous avons

$$\begin{aligned} \underline{I} &= \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + ...\underline{I}_n \\ &= \left(\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + ...\underline{Y}_n\right)\underline{U} \\ &= \underline{Y}_{eq}\underline{I} \end{aligned}$$

soit une admittance complexe équivalente

$$\underline{Y}_{eq} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + ...\underline{Y}_n$$

ou encore

$$\frac{1}{\underline{Z}_{eq}} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + ...\frac{1}{\underline{Z}_n}$$

3.4 Résonance de $Z = Z(\omega)$

On condiérera **2** *examples*:

a) exemple 1 : circuit RLC en série

$\boldsymbol{\alpha}$) L'impédence complexe $\underline{Z}$ de ce circuit est

$$\underline{Z} = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$$

de module

$$\begin{aligned} Z &= \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} \\ &= \sqrt{R^2 + L^2\omega^2\left(1 - \frac{1}{LC\omega^2}\right)^2} \end{aligned}$$

et

$$I_{eff} = \frac{U_{eff}}{\sqrt{R^2+\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)^2}}$$

$$\tan\varphi = \frac{L\omega-\frac{1}{C\omega}}{R}$$

$\boldsymbol{\beta}$) **Résonance**

$$Z = Z(\omega)$$

▶ **variation**

Etudions la **variation de** Z en fonction de la pulsation ω; on a:

$$\frac{dZ}{d\omega} = \frac{\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)\left(L + \frac{1}{C\omega^2}\right)}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}$$

d'où

$$\frac{dZ}{d\omega} = 0 \quad \Rightarrow \quad L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad : \quad \text{pulsation de résonance}$$

▶ **Propriétés de la fréquence de résonnace:** $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
Pour cette valeur particulière

$$\omega = \omega_0 \qquad \begin{aligned} Z &= \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} \\ \tan\varphi &= \frac{L\omega-\frac{1}{C\omega}}{R} \end{aligned}$$

On a les propriétés suivantes:

* **Z** minimale et $\left(\widehat{i,u}\right)=0$

$$\begin{array}{lll} Z & = Z_{\min} = R & , \text{ Z est } \textbf{minimale} \\ \varphi & = 0 & , \text{ courant } i \text{ et tension } u \text{ sont en phase} \end{array}$$

$$\begin{aligned} I_{eff} &= I_{eff}^{\max} \\ &= \tfrac{U_{eff}}{R} \end{aligned}$$

γ) Diagramme des tensions à la résonance

A la résonance $\omega=\omega_0$,

α) $U_C = U_L$

La tension U_C aux bornes de la capacité *est égale* à la tension U_L aux bornes de la inductance L.

$$\begin{aligned} U_C &= \tfrac{1}{C\omega_0} I_0 \\ &= \tfrac{\omega_0}{C\omega_0^2} I_0 \\ &= L\omega_0 I_0 = U_L \end{aligned}$$

β) $(\widehat{U_C, U_L}) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \pi$

Ces 2 tensions sont naturellement en *opposition de phase*;

par conséquent la tension U_C aux bornes du circuit est égale à la tension $U_R = RI_0$ aux bornes de la résitance.

Posons

$$\begin{array}{lll} Q & = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0} & , \text{ appelé facteur de surtension} \\ U_C & = U_L = QU & \end{array}$$

et calculons

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{\omega_2-\omega_1}{\omega_0}$$

avec

$$I(\omega_1) = I(\omega_2) = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$$

comme sur la figure Nous avons

$$\left(\frac{U}{\sqrt{R^2+\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)^2}}\right)_{\omega=\omega_{1,2}} = \frac{U}{R\sqrt{2}}$$

ce qui donne, en utilisant

$$RC = \frac{1}{Q\omega_0} = \frac{LC\omega_0}{Q}$$

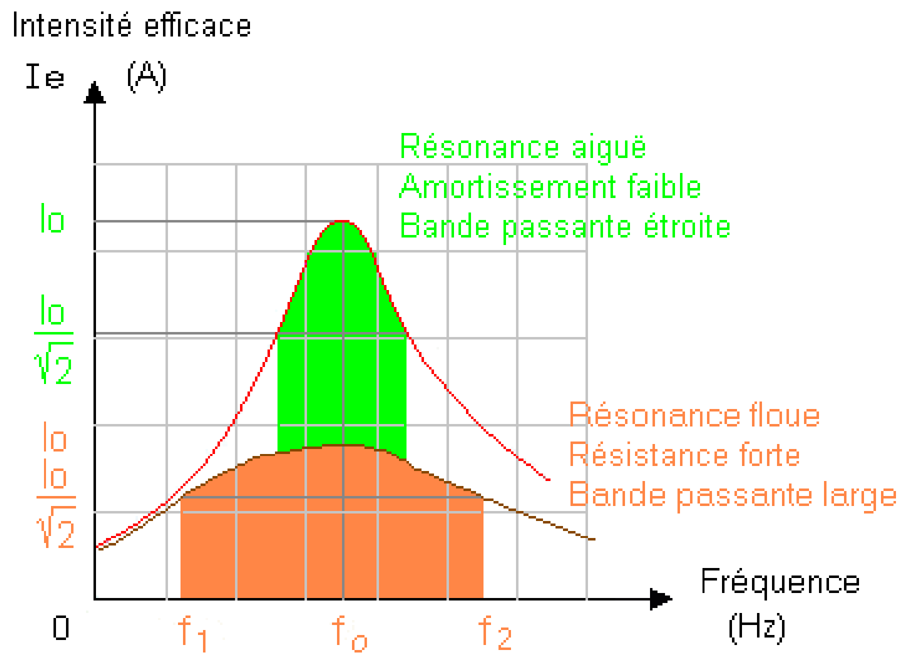


Figure 11: *facteur de surtension*

la relation suivante

$$\begin{aligned}\left(LC\omega^2 - 1\right)^2 &= R^2C^2\omega^2 \\ &= \tfrac{\omega^2}{Q^2\omega_0^2} \\ &= L^2C^2\tfrac{\omega_0^2\omega^2}{Q^2}\end{aligned}$$

d'ou

$$\left(LC\omega^2 - 1\right)^2 = L^2C^2\frac{\omega_0^2\omega^2}{Q^2}$$

ou encore en divisant par L^2C^2, on obtient

$$\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 = \frac{\omega_0^2}{Q^2}\omega^2$$

ce qui mène à:

$$\begin{aligned}\omega_2^2 - \omega_0^2 &= \frac{\omega_0}{Q}\omega_2 \\ \omega_1^2 - \omega_0^2 &= -\frac{\omega_0}{Q}\omega_1\end{aligned}$$

et par suite à:

$$\omega_2^2 - \omega_1^2 = \frac{\omega_0}{Q}\left(\omega_2 + \omega_1\right)$$

Donc

$$\omega_2 - \omega_1 = \Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$$

$\Delta\omega$ est la bande passante du circuit; elle est d'autant plus réduite que le facteur de surtension Q est grand, voir fig 11.

b) exemple 2 : bobine (L,R) en parallèle avec C

$\boldsymbol{\alpha}$) L'impédence complexe est

$$\underline{Z} = \frac{R + jL\omega}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$$

de module

$$\begin{aligned} Z &= \frac{\sqrt{R^2+L^2\omega^2}}{\sqrt{(1-LC\omega^2)^2+(RC\omega)^2}} \\ &= \frac{\sqrt{R^2+L^2\omega^2}}{\sqrt{1+(R^2C^2-2LC)\omega^2+(LC)^2\omega^4}} \end{aligned}$$

$\boldsymbol{\beta}$) En calculant l'extremum de Z, on trouve que:

▶ **l'impedence** a

un maximum

pour la valeur suivante de la pulsation

$$\omega_0 = -\frac{R^2}{L^2} + \sqrt{\frac{L + 2CR^2}{L^3C^2}}$$

▶ Pour cette valeur: $\omega = \omega_0$,
le courant I est *minimum*:
on dit qu'il y a .

anti-résonance

4 Puissances en alternatif

4.1 Définitions

Soient:

▶ un récepteur quelconque (résistance, bobine, capacité, ...) alimenté avec

▶ une tension alternative $u(t)$ et un courant $i(t)$ donnés par

$$u(t) = U_{eff}\sqrt{2}\cos\omega t \qquad \rightarrow \qquad \underline{U} = U_{eff}\sqrt{2}e^{j\omega t}$$

$$i(t) = I_{eff}\sqrt{2}\cos(\omega t - \varphi) \qquad \rightarrow \qquad \underline{I} = I_{eff}\sqrt{2}e^{j(\omega t-\varphi)}$$

avec le dephasage courant-tension

$$\widehat{(i,u)} = \varphi$$

► en complexe

$$\begin{aligned} \underline{U} &= U_{\max} e^{j\omega t} \\ \underline{I} &= I_{\max} e^{j(\omega t - \varphi)} \\ &= \Big[\underbrace{I_{\max}\cos\varphi}_{I_a} - j\underbrace{I_{\max}\sin\varphi}_{I_r} \Big] e^{j\omega t} \end{aligned}$$

► le courant $\underline{I}$ eut être décomposé en **2 parties**:

$$\begin{aligned} \underline{U} &= U_{\max} e^{j\omega t} & : \\ \underline{I} &= \underbrace{I_a}_{active} e^{j\omega t} + \underbrace{I_r}_{reactive} e^{j\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)} \end{aligned}$$

$I_a e^{i\omega t}$	$=$	*composante active*	:	en phase
$I_r e^{i\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)}$	$=$	*composante reactive*	:	en en quadrature de phase

A partir de ces notions, on définit les quantités suivantes:

a) <u>Def 1</u> : puissance instantanée $P(t)$

$\boldsymbol{\alpha}$) Elle est donnée par la relation usuelle

$$P(t) = u(t) \times i(t)$$

$\boldsymbol{\beta}$) *Somme de **2** termes*

En remplacant $u(t)$ et $i(t)$, s'ecrit:

$$\begin{aligned} P(t) &= 2U_{eff} I_{eff} \cos\omega t \cos(\omega t - \varphi) \\ &= 2U_{eff} I_{eff} \cos\omega t \left[\cos\omega t \cos\varphi + \sin\omega t \sin\varphi\right] \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} P(t) &= \underbrace{U_{eff} I_{eff} \cos\varphi\left[1 + \cos 2\omega t\right]}_{P_1(t)} + \underbrace{U_{eff} I_{eff} \sin\varphi \sin 2\omega t}_{P_2(t)} \\ &= P_1(t) + P_2(t) \end{aligned}$$

i) Le premier terme P_1:

$$P_1(t) = U_{eff} I_{eff} \cos\varphi \left[1 + \cos 2\omega t\right]$$

▶ dû à la composante **active** du courant

$$I_a = I_{eff} \cos\varphi$$

▶ il est consommé dans les *résistances pures.*

▶ sa valeur moyenne dans le temps est

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{1moy} &= \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} U_{eff} I_{eff} \cos\varphi \left[1 + \cos 2\omega t\right] dt \\ &= \frac{\omega}{2\pi} U_{eff} I_{eff} \cos\varphi \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \left[1 + \cos 2\omega t\right] dt \\ &= U_{eff} I_{eff} \cos\varphi \end{aligned}$$

▶ cette moyenne de puissance

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= U_{eff} I_{eff} \cos\varphi \\ &= U_{eff} I_a \qquad \text{appelé} \quad \textbf{puissance active} \end{aligned}$$

▶ *exemple*

- *Résistance pure:* $\varphi = 0$

$$\mathcal{P} = U_{eff} I_{eff}, \qquad Q = 0$$

Une résistance pure *consomme* de la puissance active

- *Inductance pure:* $\varphi = \frac{\pi}{2}$

$$\mathcal{P} = 0, \qquad \mathcal{Q} = U_{eff} I_{eff} = L\omega I_{eff}^2$$

Une inductance pure *consomme* de la puissance réactive

- *Capacité pure:* $\varphi = -\frac{\pi}{2}$

$$\mathcal{P} = 0, \qquad \mathcal{Q} = -U_{eff} I_{eff} = C\omega U_{eff}^2$$

Une condensateur de capacité C *fournie* de la puissance réactive au circuit

Le second terme P_2

$$P_2(t) = U_{eff} I_{eff} \sin\varphi \sin 2\omega t$$

▶ dû à la composante réactive du courant

$$I_r = I_{eff} \sin\varphi$$

▶ il est périodique, de période $\frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega}$ et
▶ sa valeur moyenne sur une période est nulle

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{2moy} &= \tfrac{1}{T}\int_0^T U_{eff} I_{eff} \sin\varphi \sin 2\omega t \\ &= \tfrac{1}{T} U_{eff} I_{eff} \sin\varphi \int_0^T \sin 2\omega t \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ce terme est dû à la présence des

réactances

dans les récepteurs.
▶ cette moyenne de puissance est:

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} &= U_{eff} I_r &&, \text{ en Volt Ampères } \textit{Réactif}\text{s (VAR)} \\ &= U_{eff} I_{eff} \sin\varphi &&: \text{ appelé } \textbf{puissance réactive} \end{aligned}$$

b) Def 2 : puissance active $\mathcal{P}$

C'est la puissance moyenne $\mathcal{P}$ de la puissance instantanée

$$\mathcal{P} = \frac{1}{T}\int_0^T P dt = P_{1moy}$$

c'est la puissance effectivement utilisable

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= U_{eff} I_{eff} \cos\varphi &&, \text{ en Watt (W)} \\ &= U_{eff} I_a \end{aligned}$$

c) Def 3 : puissance réactive $\mathcal{Q}$

C'est une grandeur $\mathcal{Q}$ qui est définie conventionnellement par analogie avec la puissance active

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} &= U_{eff} I_r &&, \text{ en Volt Ampères Réactifs (VAR)} \\ &= U_{eff} I \sin\varphi \end{aligned}$$

- *exemples*
  - **Résistance pure**: $\varphi = 0$

    $$\mathcal{P} = U_{eff} I_{eff}, \qquad Q = 0$$

    Une résistance pure *consomme* de la puissance active
  - **Inductance pure**: $\varphi = \frac{\pi}{2}$

    $$\mathcal{P} = 0, \qquad \mathcal{Q} = U_{eff} I_{eff} = L\omega I_{eff}^2$$

    Une inductance pure *consomme* de la puissance réactive
  - **Capacité pure**: $\varphi = -\frac{\pi}{2}$

    $$\mathcal{P} = 0, \qquad \mathcal{Q} = -U_{eff} I_{eff} = C\omega U_{eff}^2$$

    Une condensateur de capacité C *fournie* de la puissance réactive au circuit

d) Def 4 puissance apparente $\mathcal{S}$

α) elle définie par

$$\mathcal{S} = U_{eff} I_{eff} \qquad \text{eVolts-Amperes (VA)}$$

- – C'est la limite supérieure de la puissance active.

  $$\mathcal{S}^2 = \mathcal{P}^2 + \mathcal{Q}^2$$

  rappelons

  $$\begin{aligned} \mathcal{P} &= U_{eff} I_{eff} \cos\varphi \\ \mathcal{Q} &= U_{eff} I_{eff} \sin\varphi \end{aligned}$$

  – Remarque
  $\cos\varphi$ est appelé facteur de puissance; il doit être plus grand que 0.8.

  $$\cos\varphi > 0.8$$

  En effet, si on a un récepteur de puissance fixée $\mathcal{P}$, alimentée avec une tension U_{eff}, alors

  $$I_{eff} \cos\varphi \quad \text{est fixé}$$

  Si $\cos\varphi$ est faible, I_{eff} doit être grand

4.2 Conservation des puissance actives et réactives

Considérons des récepteurs en série alimentés en alternatif.

▶ La **tension totale** $u(t)$ est la somme des tensions $u_i(t)$ aux bornes de chacun des récepteurs

$$u(t) = u_1(t) + ... + u_n(t)$$

▶ Dans la **représentation complexe**, on a:

$$\begin{aligned} \underline{U} &= \underline{U}_1 + ... + \underline{U}_n \\ &\Downarrow \\ Ue^{j\varphi} &= U_1 e^{j\varphi_1} + ... + U_n e^{j\varphi_1} \end{aligned}$$

▶ **projection**

$$\begin{aligned} U_{eff}\cos\varphi &= U_{1eff}\cos\varphi_1 + ... + U_{neff}\cos\varphi_n \\ U_{eff}\sin\varphi &= U_{1eff}\sin\varphi_1 + ... + U_{neff}\sin\varphi_n \end{aligned}$$

- – *conséquence 1*

  $$\begin{aligned} U_{eff}I_{eff}\cos\varphi &= U_{1eff}I_{eff}\cos\varphi_1 + ... + U_{neff}I_{eff}\cos\varphi_n \\ \mathcal{P} &= \mathcal{P}_1 + ... + \mathcal{P}_n \end{aligned}$$

  La puissance active $\mathcal{P}$ fournie par le générateur est *la somme* des puissance actives $\mathcal{P}_i$ consommées par chacun des récepteurs.

  – *conséquence 2*
  Si on projette suivant l'axe perpendiculaire à $\vec{I}$, on obtient:

  $$\begin{aligned} U_{eff}I_{eff}\sin\varphi &= U_{1eff}I_{eff}\sin\varphi_1 + ... + U_{neff}I_{eff}\sin\varphi_n \\ \mathcal{Q} &= Q_1 + ... + Q_n \end{aligned}$$

  La **puissance réactive** $\mathcal{Q}$ fournie par le générateur est la somme des **puissances réactives** consommées par chacun des récepteurs.